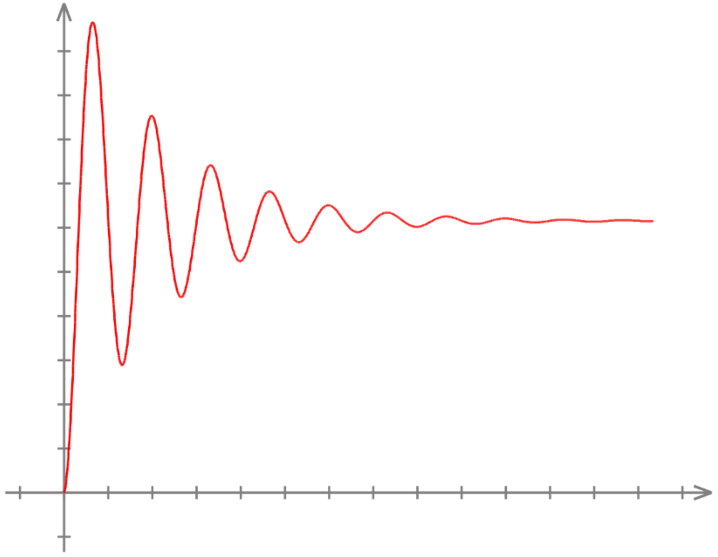
Cours 16 – 07/11/2024

8. L’oscillateur harmonique

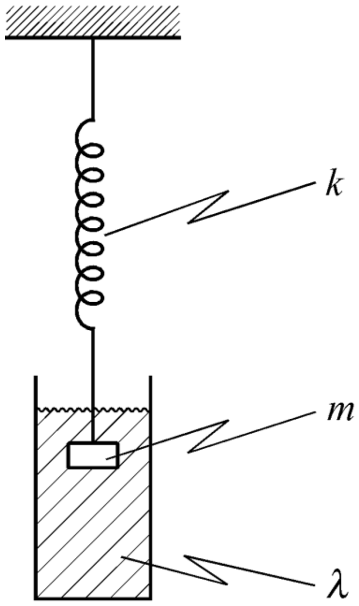
8.4. Oscillateur soumis à une force de frottement fluide



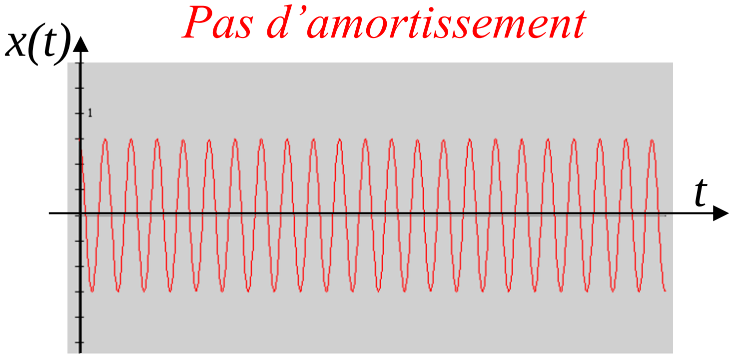


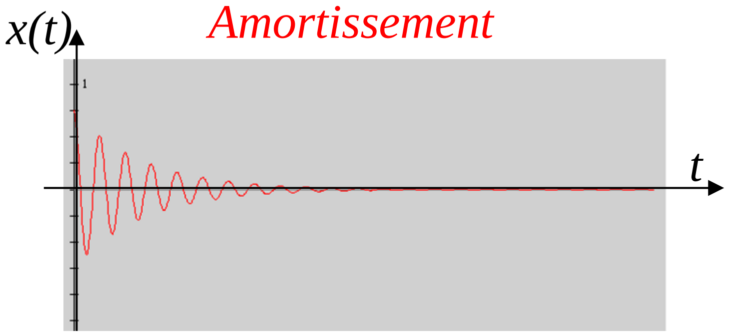
8.4. Oscillateur soumis à une force de frottement fluide

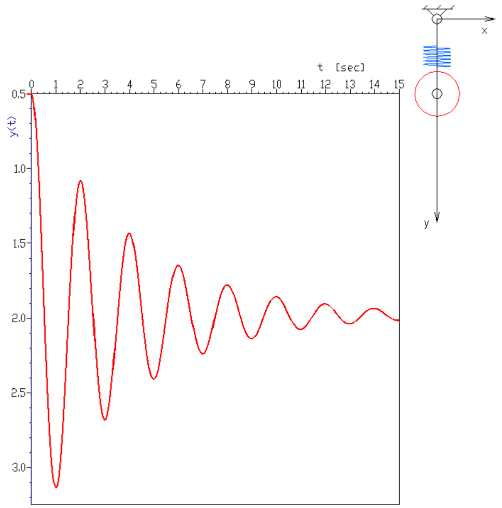
■ Amortissement d'un oscillateur

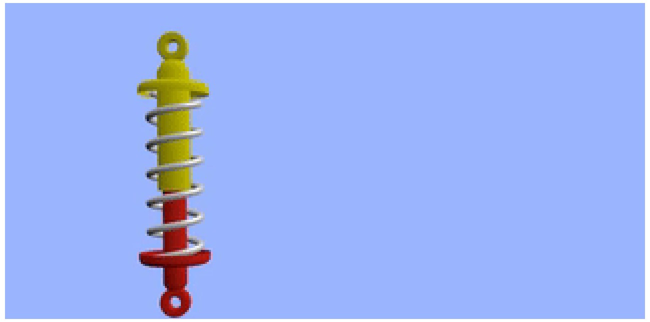


Application : amortisseur



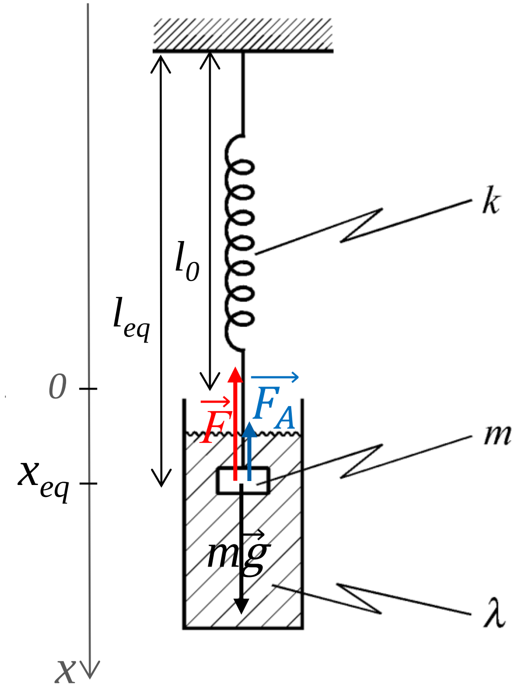






8.4. Oscillateur soumis à une force de frottement fluide

Ressort avec masse plongeant dans un liquide



<u>Position d'équilibre :</u>

La force de pesanteur : $m\vec{g}$

La force de rappel du ressort : $\vec{F} = -k\vec{r}$ *avec* $\vec{r} = (l - l_0)\vec{e_x} = x\vec{e_x}$ *avec l'origine O à l'extrémité du ressort au repos*

La force due à la poussée d'Archimède : $\vec{F_A} = -M\vec{g}$ *avec* $M = \rho V$ *(V volume de la masse et* ρ *masse volumique du fluide)*

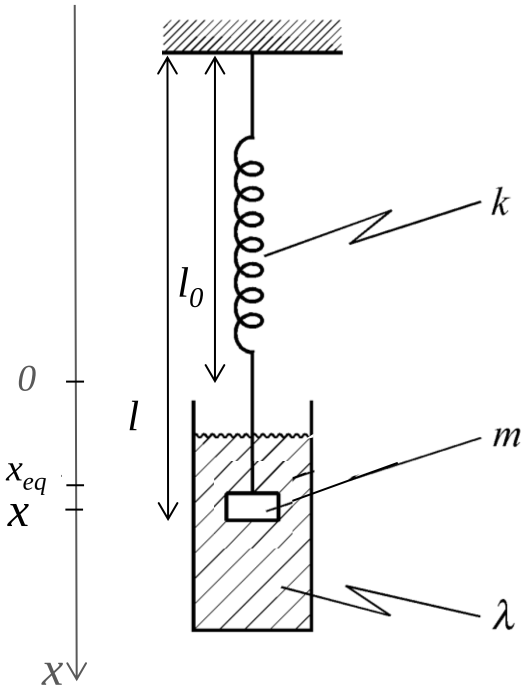
2nde loi de Newton : $m\vec{a} = \vec{0} = m\vec{g} - k\overrightarrow{x_{eq}} - M\vec{g}$

On projette sur Ox : $0 = mg - k\,x_{eq} - Mg$

$$\text{soit} \quad x_{eq} = \frac{m - M}{k} g$$

8.4. Oscillateur soumis à une force de frottement fluide

■ Ressort avec masse plongeant dans un liquide



<u>Oscillations avec force de frottement fluide :</u>

La force de frottement fluide en régime laminaire est $\vec{F}_f = -K\eta\vec{v}$

2nde loi de Newton : $m\vec{a} = m\vec{g} - kx\,\vec{e}_x - M\vec{g} - K\eta\vec{v}$

On projette sur Ox : $m\dfrac{d^2x}{dt^2} = mg - kx - Mg - K\eta\dfrac{dx}{dt}$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = mg - k(l-l_0) - Mg - K\eta\frac{dx}{dt}$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = mg - k(l - l_{eq} + l_{eq} - l_0) - Mg - K\eta\frac{dx}{dt}$$

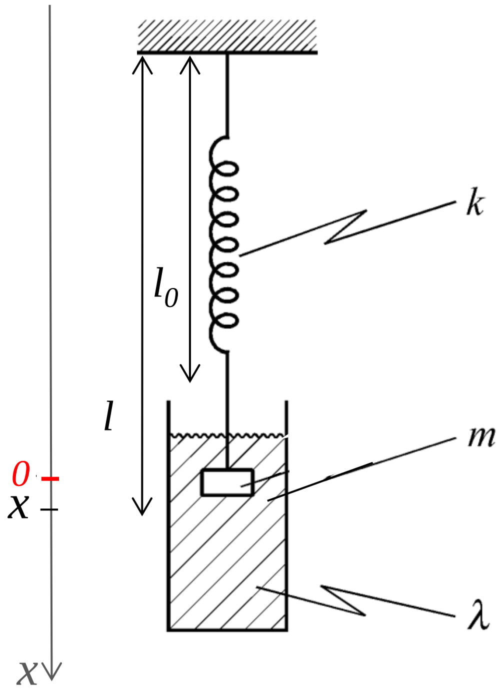
$$m\frac{d^2x}{dt^2} = mg - k(l - l_{eq} + x_{eq}) - Mg - K\eta\frac{dx}{dt}$$

On pose $x' = l - l_{eq}$ *et* $x_{eq} = \frac{m-M}{k}g$

On trouve $\boxed{m\dfrac{d^2x'}{dt^2} = -kx' - K\eta\dfrac{dx'}{dt}}$ *avec x' allongement par rapport à la position d'équilibre*

8.4. Oscillateur soumis à une force de frottement fluide

Ressort avec masse plongeant dans un liquide



<u>Oscillations avec force de frottement fluide :</u>

Pour simplifier l'écriture, on pose x l'allongement par rapport à la position d'équilibre

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - K\eta\frac{dx}{dt} \quad \text{ou encore} \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x + \frac{K\eta}{m}\frac{dx}{dt} = 0$$

Et finalement

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + 2\lambda\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0}$$

Equation différentielle du mouvement

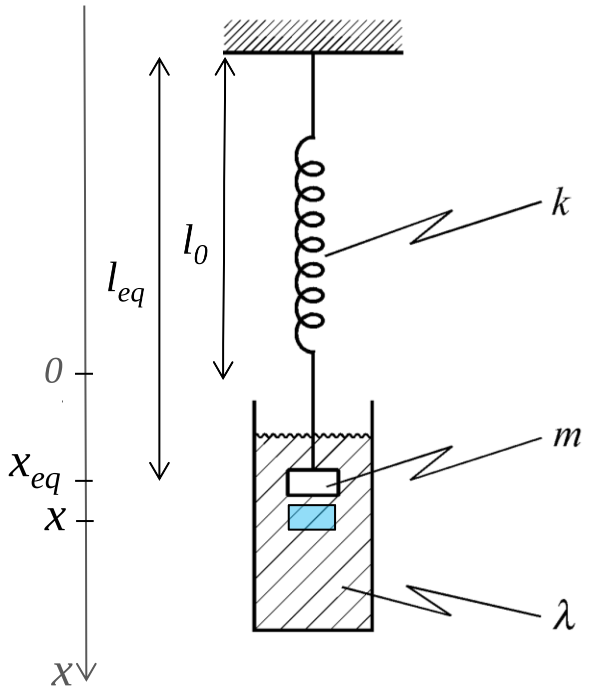
avec

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$ *Pulsation de l'oscillateur non amorti*

$$\lambda = \frac{K\eta}{2m}$$ *Coefficient d'amortissement*

8.4. Oscillateur soumis à une force de frottement fluide

■ Ressort avec masse plongeant dans un liquide



<u>Remarque</u> : équation différentielle du mouvement en prenant comme référence la position du ressort sans masse

2nde loi de Newton : $m\vec{a} = -k\vec{r} - K\eta\vec{v} - M\vec{g} + m\vec{g}$ avec $\vec{r} = (l - l_0)\vec{e}_x = x\vec{e}_x$

On projette sur Ox : $m\dfrac{d^2x}{dt^2} = -kx - K\eta\dfrac{dx}{dt} - Mg + mg$

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2\, x + 2\lambda\frac{dx}{dt} = \frac{m-M}{m}g}$$

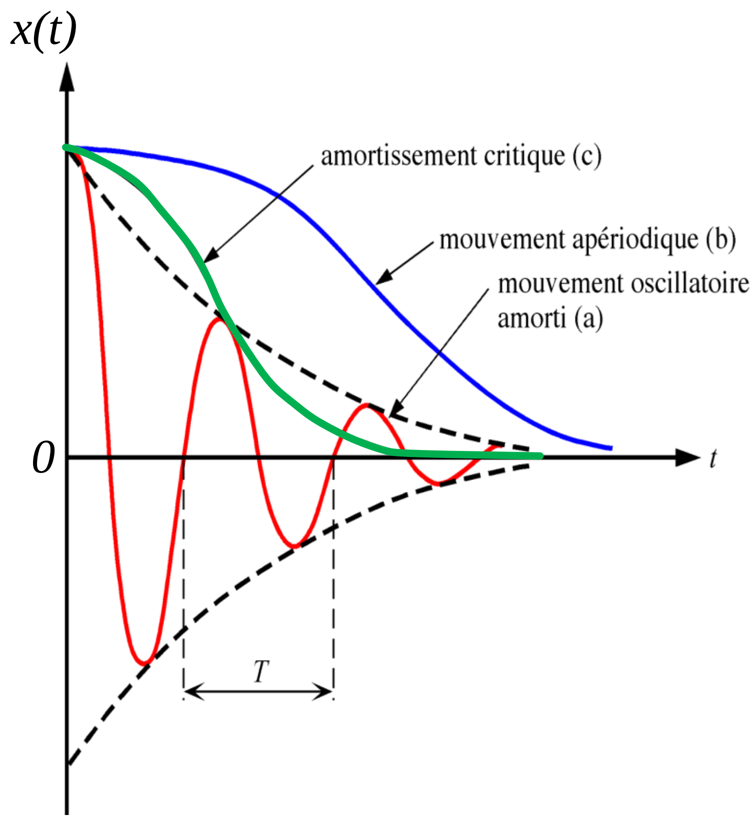
avec $\begin{cases} \lambda = \dfrac{K\eta}{2m} \\ \omega_0 = \sqrt{k/m} \end{cases}$

Equation différentielle avec second membre $\left(\dfrac{m-M}{m}g\right)$

$\Rightarrow$ *cela ne change pas le mouvement*

8.4. Oscillateur soumis à une force de frottement fluide

■ Ressort avec masse plongeant dans un liquide



$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\boxed{\lambda}\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

λ définit le type d'amortissement

Le coefficient d'amortissement λ définit 3 différents régimes :

- Amortissement faible (λ petit) qui correspond à des oscillations dont l'amplitude diminue continûment. La période est plus grande que celle de l'oscillateur harmonique non amorti.

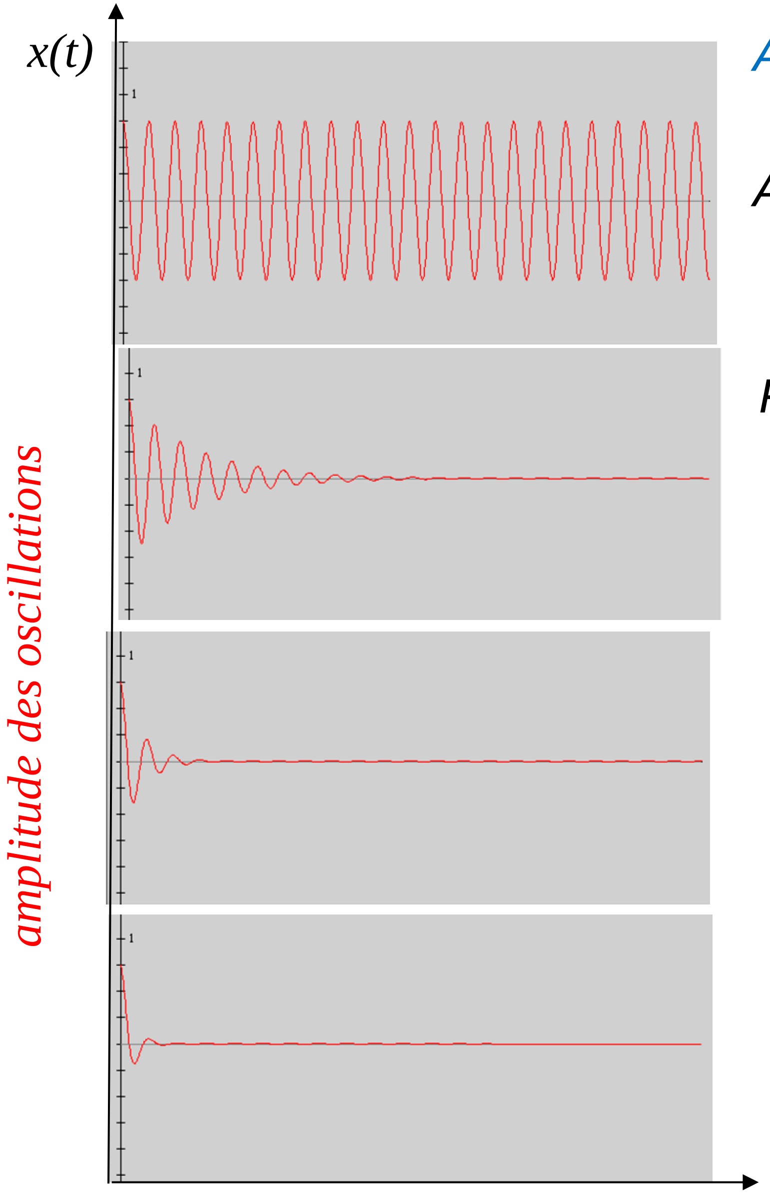
- Amortissement critique pour une valeur bien définie de λ. Ce régime correspond à un retour à la position d'équilibre sans qu'il y ait la moindre oscillation ($x(t)$ ne devient jamais négatif).

- Amortissement fort pour des valeurs de λ élevées. Le système n'oscille plus et revient lentement à l'équilibre.

On remarque que l'on retrouve l'équation d'un oscillateur libre pour λ=0

8.4. Oscillateur soumis à une force de frottement fluide

■ Ressort avec masse plongeant dans un liquide

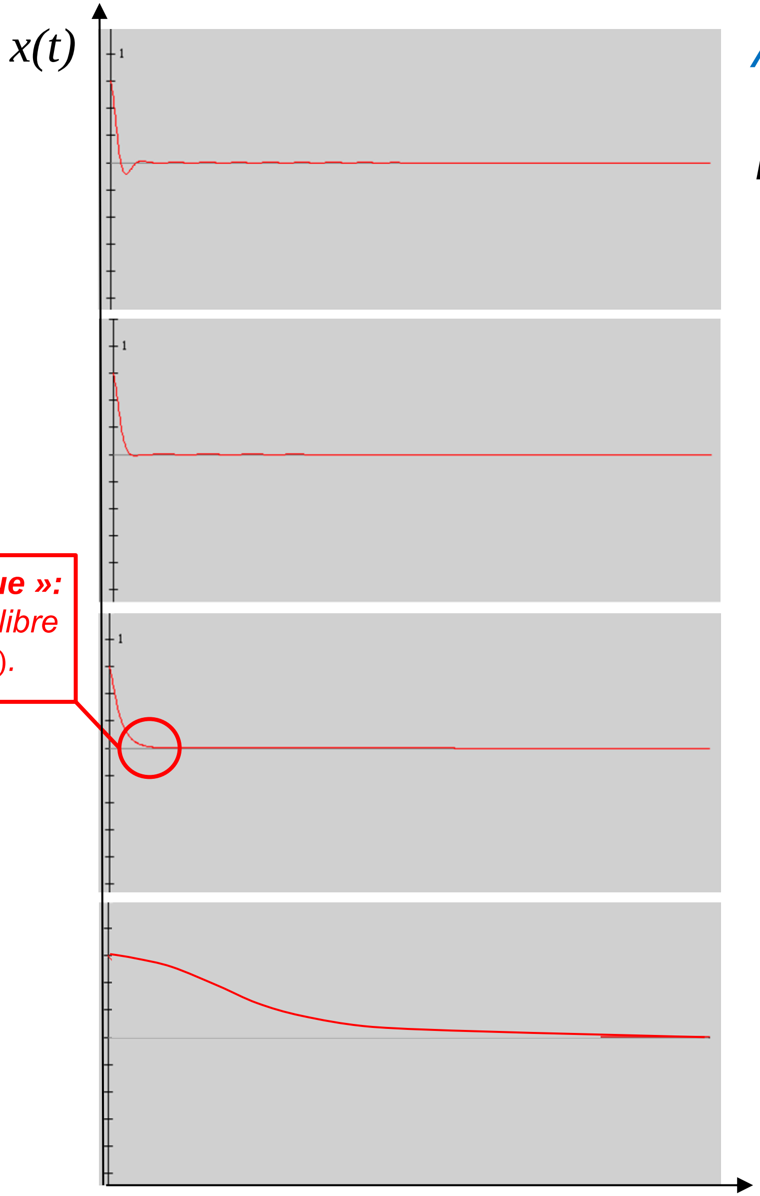


Amortissement

Aucun

Faible

amortissement augmente



Amortissement « critique »: *retour à la position d'équilibre sans oscillation ($x(t) \geq 0$).*

Amortissement

Moyen

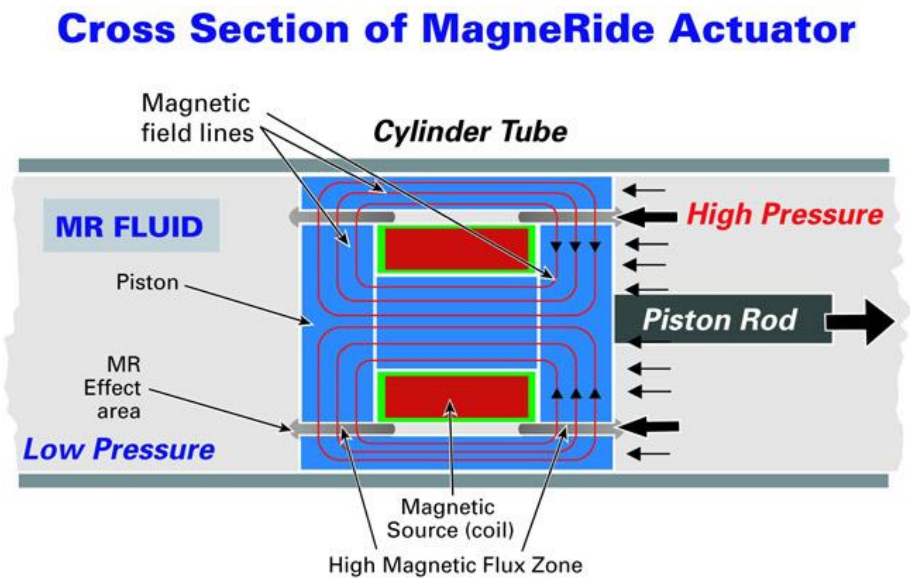
Fort

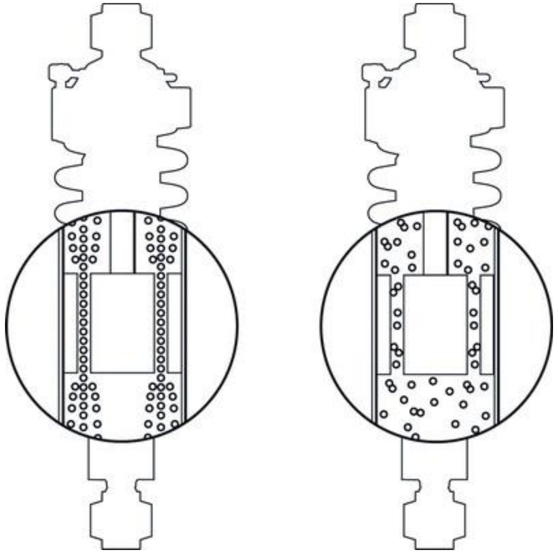
8.4. Oscillateur soumis à une force de frottement fluide

Information : amortisseur « dynamique » - suspension active

La réponse de l'amortisseur peut être contrôlée en temps réel (temps de réaction de quelques ms) en changeant les propriétés du fluide, c'est à dire en jouant sur le coefficient d'amortissement λ.

Pour ce faire, on applique un champ électrique dans une bobine qui crée un champ magnétique. Celui-ci ordonne des particules magnétiques présentes dans le fluide de l'amortisseur, ce qui en modifie la viscosité, et par conséquent λ.





avec champ magnétique *sans champ magnétique*